



## Fraktal nedir?

### Fraktallar hakkında genel bilgi, fraktal örnekleri ve tarihçesi.

Öncelikle son zamanlarda çok sık sorulan bu sorunun cevabını vererek başlayalım. Fraktal “parçalanmış” ya da “kırılmış” anlamına gelen Lâtince “*fractuuss*” kelimesinden gelmiştir. Kendi kendini tekrar eden ama sonsuza kadar küçülen şekilleri, kendine benzer bir cisimde cismi oluşturan parçalar ya da bileşenler cismin bütününcü inceler. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelere sonsuza kadar sürebilir; tam tersi de her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde, gene cismin bütününe benzemesi olayıdır.

Fraktalların ilk şekilleri 17. yüzyılda matematikçi ve filozof olan Leibnitz tarafından tekrarlamalı, kendine-benzeyen şekiller olarak ortaya atılmıştır. (Ancak yalnızca doğrusal olacağını farz ederek, yanlış düşünüyordu.) Daha sonra 1872’de bugün fraktal adı verilen ve Weierstrass tarafından, sürekli ancak hiçbir noktada diferansiyellenemeyen grafik çizilmiştir. 1904 yılında Helge von Koch, Weierstrass’ın tanımını çok soyut ve analitik buluyordu, bununla birlikte “Helge von Koch Kar tanesi”nin şekli ve geometrik tanımını vererek konuyu daha da zenginleştirmiştir. Bu aşamadan sonra birçok matematikçi kendi adlarını taşıyan şekilleri tanıttılar ve kendilerine göre yorumlarını yaptılar. Örneğin 1915 yılında Waclaw Sierpinski, “Sierpinski Halısı” adlı kendi adını taşıyan üçgen fraktalı tanıtmış. Bertrand Russell ve Paul Pierre Lévy; “Mükemmel Güzellik” ve “Lévy C Eğrisi” adlı fraktallarını geliştirmişler, Georg Cantor reel sayıların bir alt kümelerini alarak bunu fraktal olarak ifade etmiştir. Bunun gibi birçok örnek verilebilir ancak biz bunlardan yalnızca ikisini inceleyeceğiz.

Tekrarlayan fonksiyonların kompleks düzlemde ilk olarak 19. ve 20. yüzyılda Henri Poincaré, Felix Klein, Pierre Fatou ve Gaston Julia tarafından gösterilmiştir. Ancak bilgisayar desteği olmadan bu şekillerin güzelliğinin farkına varılması mümkün olmadı.

Polonya asıllı matematikçi Benoît Mandelbrot 1975 yılında bu konuya, oğlunun Latince sözlüğünü karıştırırken karşılaştığı kırıklı anlamındaki “*Fraktal*” ismini verdi. Mandelbrot’un 1960’lı yıllarda “*İngiltere’nin kıyı uzunluğu kaç kilometredir?*” diye sorarak çıktığı bu yolda, yazdığı “*The Fractal Geomery of Nature*” adlı kitabının ilk sayfasında şu cümle yer alır, “*Bulutlar küre değildir, dağlar koni değildir, kıyılar çember değildir ve havlamak düz değildir, ışık da doğru boyunca hareket etmez.*” Fraktal tanımı için, Mandelbrot şunu yazmıştır “*Fraktal, Hausdorff – Besicovitch boyutu kesin olarak topolojik boyutunu aşan bir kümedir.*” Mandelbrot’un IBM firmasında çalışan bir mühendis olması sayesinde fraktalların bilgisayar modellemesini yapması daha kolay olmuştur.

Fraktal geometri “Euclidean” olmayan geometridir. Doğa geometrisi olarak da bilinir. Yani bildiğimiz kare, dikdörtgen, çember, küre gibi basit olmayan şekilleri açıklamaya çalışır. Mandelbrot’un “*İngiltere’nin kıyısı kaç kilometredir?*” sorusunun cevabı, kıyı şeridini ölçecek cihazın hassasiyetine bağlıdır. Örneğin ölçeği çok büyük bir harita kullansak hatalar büyük

olacaktır. Uzunluğu bir metre olan bir cetvel kullansak hatamız bir metrenin altında kalan uzunluklarda, daha hassas bir ölçen cihaz kullansak, hatamız ölçen cihazın ölçemediği uzunlukların altında kalan miktarlar kadar olacaktır. Dolayısıyla kıyı şeridinin uzunluğunu doğru ölçmek için atomik boyutlarda cihaz kullanmamız gerekir. Sonuç olarak daha hassas cihazlarla yaptığımız ölçümler, kıyı şeridinin uzunluğunu artıracak ve sonunda uzunluğu sonsuz bulmuş olacağız.

Mandelbrot'un bir sonraki sorusu ise şu olmuştur: "*Bir iplik yumağının boyutu nedir?*" Uzaktan bakıldığında yumak bir noktadan ibarettir, yani boyutu sıfırdır. Daha yakından yapılan gözlemlerde yumak yüzeyinde düzensizlikler bulunan bir küre gibidir. Boyut sayısı üçe çıkmıştır. Daha yakından bakıldığında yumağı oluşturan tek boyutlu iplik ayırık olarak gözlemlenebilir. Tek boyutlu ipliğe büyüteçle bakıldığında iplik üç boyutlu sütunlar gibi görülür. Mikroskop altında sütunlar tek boyutlu liflere, lifler ise sonunda boyutsuz noktalara dönüşmektedir. O halde, yumağın gerçek boyutu nedir?

Mandelbrot, bir birim cinsinden ölçülemez olan cisimlerin bir pütürlülük derecesine sahip olduğunu ve bu pütürlülük derecesini ölçmenin bir yolunu bulmuştur. Mandelbrot'a göre ölçek değıştiğinde düzensizlik derecesi sabit kalmaktaydı. 1975 yılında Mandelbrot pütürlülük derecesinin ismini de koymuş oldu: Fraktal boyut. Pütürlülük özelliğı gösteren cisimler de fraktallar adını aldı.

Tüm fraktallar kendine benzer ya da en azından tümüyle kendine benzer olmamakla birlikte, çoğı bu özelliğı taşır. Kendine benzer bir cisimde cismi oluşturan parçalar ya da bileşenler cismin bütününe benzer. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelere sonsuza değın sürebilir; öyle ki, her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde, gene cismin bütününe benzer. Bu fraktal olgusu, kar tanesi ve ağaç kabuğunda kolayca gözlenebilir. Bu tip tüm doğal fraktallar ile matematiksel olarak kendine benzer olan bazıları, stokastik, yani rastgeledir; bu nedenle ancak istatistiksel olarak ölçeklenirler. Fraktal cisimler, düzensiz biçimli olduklarından ötürü Öklidci şekilleri ötelenme bakışına sahip değıldirler. (Ötelenme bakışımına sahip bir cisim kendi çevresinde döndürüldüğünde görünümü aynı kalır.)

Mandelbrot'un fraktalları ise, kesirli boyutlara sahip olmaları açısından, geleneksel geometriden farklı bir yapı sergiler. Elinizde bir sayfa kâğıt olduğunu ve bunun iki boyutlu olduğunu düşünün (aslında kâğıt, kalınlığı da olan üç boyutlu bir nesnedir ama şimdilik kalınlıksız iki boyutlu bir yüzey düşünüyoruz). Kâğıdı elinizde o kadar çok buruşturup sıkıştırıyorsunuz ki, artık son derece karmaşık hale gelmiş bu iki boyutlu yüzeyi "iki boyutlu" olarak nitelemek gittikçe imkânsızlaşıyor. Üç boyutlu olduğunu da iddia edemiyorsunuz, zira elinizdeki ne kadar buruşmuş olursa olsun, iki boyutlu bir yüzeydir aslında. Dolayısıyla, buruşma miktarı arttıkça, 2.05, 2.28, 2.4 gibi kesirli boyutlara sahip bir yüzey şekli elde etmeye başlarsınız. İşte fraktallardaki kesirli boyut kavramı da buna benzer bir karmaşıklığın neticesinde ortaya çıkar. Aslında doğada hâkim olan geometri de işte bu "fraktal geometri"dir.

Yerküreyi 6 - 7 kez dolaşabilecek kan damarlarını ve bir kaç tenis kortu kadar alan kaplayan akciğer hava keseciklerini bu küçücük vücudumuza; açıldığında 2 metreyi aşkın bir

uzunluğa erişen DNA molekülümüzü, 100 trilyon hücremizin her birindeki bir kaç mikrometrelik (milimetrenin binde biri) çekirdeğin içine paketlenmesinin ardında, işte bu fraktal kuralları yatmaktadır.

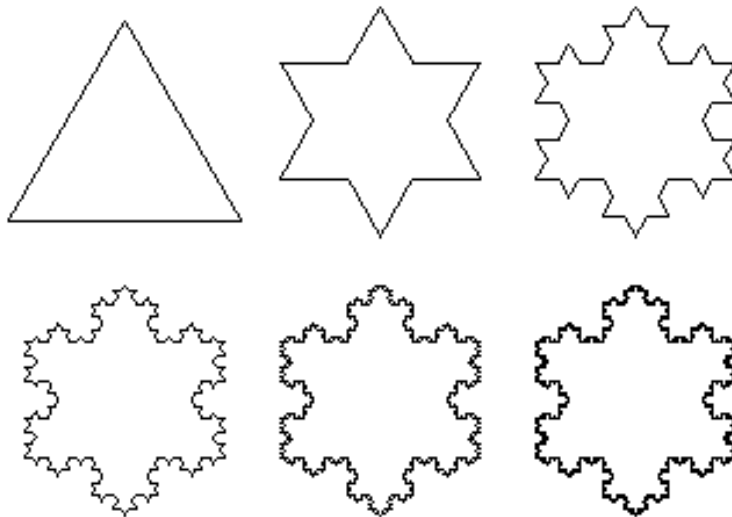
Fraktal boyut olarak adlandırılan matematiksel parametreye tekrar dönmek gerekirse, Bir cisim ne kadar büyütülürse büyütülsün ya da bakış açısı ne kadar değiştirilirse değiştirilsin, hep aynı kalması fraktalların bir özelliğidir.

Fraktal boyut bir fraktal eğri yardımıyla anlaşılabilir. Oluşturulmasının her aşamasında bu tip bir eğrinin çevre uzunluğu  $4/3$  oranında büyür. Fraktal boyut (D) 4'e eşit olabilmesi için alınması gereken kuvvetini gösterir, yani;

$3^d = 4$  bu bakımdan fraktal eğriyi niteleyen boyut  $\log^4/\log^3$  ya da kabaca 1,26'dır. Fraktal boyut, "Öklidci" olmayan belirli bir biçimin karmaşıklığını ve şekil nüanslarını açığa çıkarır. Burada denklemlerin sonsuz kez tekrarlanması ve bunların belirli oranlardaki halinin renklendirilmesi ile bilgisayar şekilleri oluşturulur.

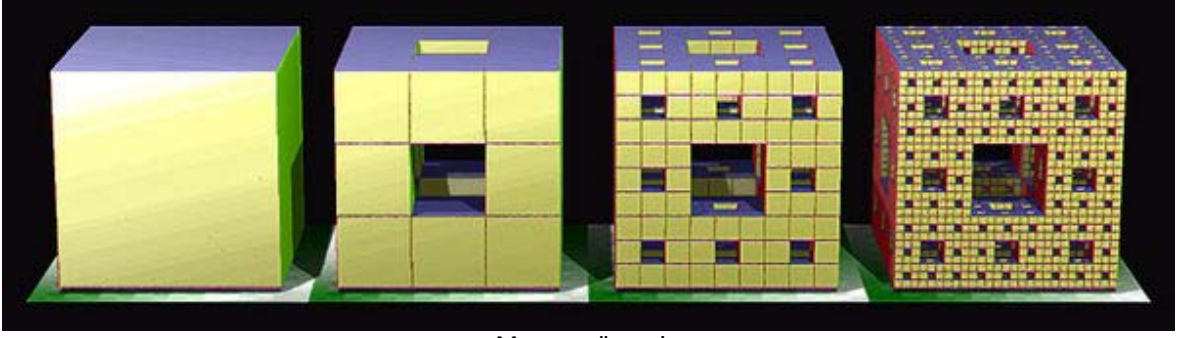
Kendine benzerlik ve tamsayı olmayan boyutlu kavramlarıyla birlikte fraktal geometri, istatistiksel mekanikte, özellikle görünürde rastgele özelliklerden oluşan fiziksel sistemlerin incelenmesinde giderek daha yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin, gökada kümelerinin evrendeki dağılımının saptanmasında ve akışkan buręaçlanmalarına ilişkin problemlerin çözümlerinde fraktal benzetimlerden (simülasyon) yararlanılmaktadır. Fraktal geometri bilgisayar grafiklerinde de yararlı olmaktadır. Fraktal algoritma ise, engebeli dağlık araziler ya da ağaçların karışık dal sistemleri gibi karmaşık, çok düzensiz doğal cisimlerin gerçekteki benzer görüntülerinin oluşturulabilmesini olanaklı kılmıştır.

#### Bazı fraktal örnekleri:



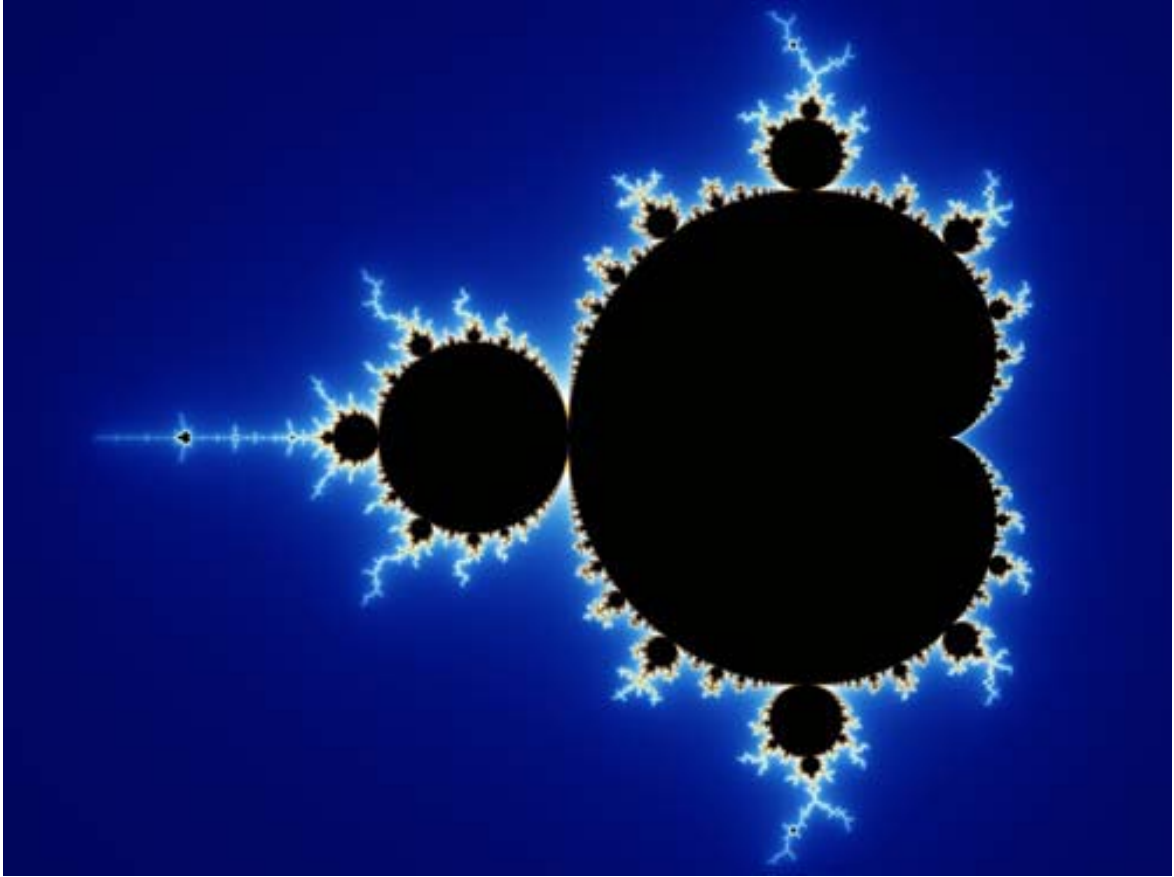
Helge von Koch Kar tanesi

Koch kar tanesi, eş kenar bir üçgenin sürekli olarak uç kısımlarının, simetrik şekilde katlanmasıyla elde edilir. şekli kar tanesini andırđından bu adı almıştır.



Menger süngeri

Menger süngerinin özelliği belirli bir hacmi olmasına rağmen sonsuz yüzeye sahip olmasıdır. Küpün yüzeyini üçe üç bölüp, kalan kısımları da sürekli olarak üçe üç bölerek ortalarından, kalan kısımlarının çıkarılmasıyla elde edilir. Eiffel kulesi Menger süngerinden etkilenilerek yapılmıştır.



Mandelbrot fraktalı

Mandelbrot fraktalı bilinen en meşhur fraktaldır. Fraktal denilince ilk akla gelen fraktallardan olan Mandelbrot fraktalı kompleks düzlemde bilgisayar desteği ile çizilmiş muhteşem bir grafiktir. Bununla birlikte denkleminin şekli kadar karmaşık değildir. Denklem  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  şeklindedir. Resmi ne kadar büyütürseniz büyütün içerisinde büyük şeklin bir kopyasını görmek fonksiyonun bilgisayar yardımıyla sonsuz kez tekrarlanıp, renklendirilmesi ile olur.

Şimdi Kantor tozu ile Sierpinski şapkasını inceleyelim.

## 1.0.0 FRAKTAL ÖRNEKLERİNİN İNCELENMESİ

### 1.1.0 ÜÇLÜ KANTOR BULUTU

1883 de Georg Cantor yayınladığı bir yazısında **Cantor discontinuum** (Cantor kesiklisi) (Cantor middle – thirds set  $\equiv$  Cantor orta üçlülere cümlesi) veya kısaca **Kantor Kümesi** adı ile bilinen bir kümeden ilk defa bahsetmiştir. Daha sonra bu cümle Hausdorff tarafından kesirli boyut için önemli bir örnek olarak seçilmiştir.

Bir örnek ile başlayalım. Bu cümle farklı yollarla oluşturulabilir. Mandelbrot tarafından “**Cantordust**” (Kantor tozu) olarak adlandırılan bu cümlelerin asıl adı “Cantor Set” (Kantor kümesi)dir. Bu isim onun ne olduğunu anlatan bir isimdir. Toz kelimesi sıfır boyut, yani bir “nokta”yı vurgulamaktadır.

**Kantor bulutunun yapısı:** Üçlü Kantor bulutu  $\mathbb{R}$  reel sayılar doğrusunun bir alt kümesidir. İlk olarak bir yaklaşımlar dizisi tanımlayalım. Bir  $C_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$  kapalı aralığı ile işe başlayalım. Bu kapalı aralığı üç eşit parçaya ayıralım ve ortadaki parçayı atalım. Elimizde kalana  $C_1$  dersek  $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  olur.  $C_1$ 'deki  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  ve  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  parçalarının her birini ayrı ayrı üçer eşit parçaya ayıralım ve her birinde benzer şekilde ortadaki parçayı atalım. Elimizde kalana  $C_2$  dersek,

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

olduğu görülür. Böylece devam edersek  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  dizisini elde ederiz. Bu dizinin  $n \rightarrow \infty$  için limitine C dersek C'ye **Üçlü Kantor Bulutu** denir. Şekil 1.1.1'de görüldüğü gibi azalan bir

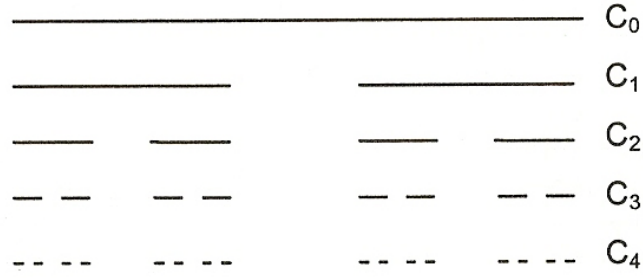
$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$$

Dizisi söz konusudur. O zaman dizinin limiti C ise  $C_k$ 'lerin arakesiti olarak

$$C_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

alınabilir.

Bu fraktalı oluşturmak için başka benzer yollar da vardır. Oluşturma esnasında atılan parçalara **rema** (yer değiştiren parçalar) denir.



Şekil 1.1.1 Üçlü Kantor Bulutu

Fraktal oluşturulan kümelerin dizisi, tekrarlayan bir tarzda ortaya çıkar. Bu demektir ki, dizinin kümelerine ait gerçeklerin ispatı tümevarım metodu ile kolayca yapılabilir. Örneğin  $C_k$  kümesi, her birinin boyu  $\left[\frac{1}{3}\right]^k$  olan  $2^k$  tane ayırık ve kapalı doğru parçalarından oluşmaktadır. O halde  $C_k$ 'nin toplam uzunluğu, bu doğru parçalarının uzunluklarının toplamı olup  $\left[\frac{2}{3}\right]^k$  dir.  $k \rightarrow \infty$  için limit,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

dir. O halde Kantor bulutunun toplam uzunluğu sıfırdır. “Toplam uzunluğun” matematiksel karşılığı “Lebesgue ölçüsüdür”. Bu nedenle  $C$ 'nin ebadını hesaplamak için toplam uzunluk çok kullanışlı değildir. Daha sonra analizini yapacağız ki  $C$ 'nin fraktal boyutu 1'den küçüktür.

Kantor bulutunu oluşturan noktalara biraz daha dikkatli bakalım. Eğer  $C_k$  yaklaşımlarından birini yapmak için gerekli olan kapalı aralıklardan biri  $[a, b]$  ise  $a$  ve  $b$  uç noktaları  $m > k$  olmak üzere,  $C_k$ 'dan sonra gelecek olan  $C_m$  kümelerinin hepsine ait olacaktır. Dolayısıyla  $C$  arakesitine de dâhil olacaktırlar. Bütün  $C_k$  yaklaşımlarının bütün aralıklarının bütün uç noktalarının kümesini alarak noktaların bir sonsuz kümesini elde ederiz. Bu noktaların hepsi  $C$ 'ye dâhildirler. (Bununla birlikte, uç noktaların bu kümesi sayılabilir bir kümedir.)

Fakat şunu da ifade etmek gerekir ki,  $C$ 'de bu uç noktalarından başka noktalar da vardır.

### 1.1.2 Not:

- i)  $C$  kümesi (pozitif uzunluklu) hiçbir aralık kapsamaz.
- ii)  $C$  kümesinin izole edilmiş noktaları yoktur. Yani,  $a \in C$  ise,  $\forall \varepsilon > 0$  için,  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aralığı ne kadar küçük olursa olsun,  $C$ 'ye ait olan “ $a$ ”dan başka noktaları da kapsar.
- iii)  $C$  kümesi kapalıdır. Yani,  $a \in C$ 'dir.

**1.1.3 Alıştırma.**  $r$  bir pozitif tam sayı olsun. Uzunlukları  $\geq r$  olan kaç tane yer değiştiren parça vardır?

**Koordinatlar.** Üçlü Kantor bulutunun elemanlarını 3 tabanına göre (açılımları cinsinden) karakterize etmenin alışılmış bir yolu vardır.

**1.1.4 Ek.** 3 tabanına göre standart bilgilerin bir özetini verelim. 10 tabanına göre alışılmış açılımların nasıl olduğunu hatırlıyorsunuz. 3 tabanı için de benzer açılımlar vardır. Her bir pozitif  $x$  tamsayısı,  $a_j$  katsayıları 0, 1, 2 listesinden seçilmek üzere

$$x = \sum_{j=0}^M a_j 3^j$$

B biçiminde tek türlü ifade edilebilir. Örneğin

$$15 = 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$$

dir. Bunu çoğu kez  $15 = (120)_3$  biçiminde ifade edeceğiz. 10 tabanı için alt indis olarak 10 yazılmaz.

Benzer şekilde kesirleri de ifade edebiliriz. 0 ile 1 arasındaki her bir  $x$  sayısı, katsayılar 0, 1, 2 listesinden seçilmek kaydı ile

$$x = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j 3^j$$

biçiminde yazılabilir. Örnekler,

$$\frac{7}{9} = (0.21)_3 = \frac{1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1}{3^2}$$

$$\frac{1}{4} = (0.02020202 \dots)_3$$

$$= \frac{1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^7 + \dots}{3^8}$$

$$= \frac{1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 27 + 2 \cdot 81 + 2 \cdot 243 + \dots}{3^8} \text{ (tekrarlayan açılım)}$$

$$\sqrt{2} = (1.1020112 \dots)_3$$

$$= 1 \cdot 3^0 + \frac{1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^7 + \dots}{3^{7+\dots}} \text{ (tekrarsız açılım)}$$

Bazı sayılar  $\left(\frac{a}{3^k} \text{ biçimindeki rasyonel sayılar}\right)$  iki farklı açılıma sahiptirler.

Örneğin,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= (0.10000000 \dots)_3 \\ &= (0.22222222 \dots)_3\end{aligned}$$

gibi.

**1.1.5 ÖNERME.**  $x \in [0,1]$  olsun.  $x$  Üçlü Kantor kümesi  $C$ 'ye dâhildir.  $\Leftrightarrow x$ , 3 tabanına göre sadece 0 ve 2 katsayılı bir açılıma sahiptir.

**İSPAT:** Nokta üçlüsünün sağındaki ilk yer bir (1)dir.  $\Leftrightarrow$

$$(0.1000000 \dots)_3 = \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} = (0.1222222 \dots)_3.$$

İlk yer değiştiren parça  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  aralığıdır. Bu parça değiştirildikten sonra  $C_1$  parçası elde edilir. ( $\frac{1}{3}$  ve  $\frac{2}{3}$  sayılarının her biri ikişer açılıma sahiptir, bunlardan birisi birinci yerde 1'dir diğeri değildir. Dolayısıyla bunlar değiştirilmemelidir.) Dolayısıyla  $C_1$  parçası  $[0,1]$ 'deki sayılardan 3 tabanına göre açılıma sahip olan fakat birinci yerlerinde 1 bulunmayanları kapsar.  $C_1$ 'deki bir  $x$  sayısının ikinci yeri 1'dir.  $\Leftrightarrow x$  sayısı  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  veya  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  parçalarından birindedir, bu son iki parçaya ikinci basamaktan parçalar denir. Bu parçaları değiştirerek  $C_2$  elde edilir. Dolayısıyla  $C_2$  parçası  $[0,1]$ 'deki sayılardan 3 tabanına göre açılıma sahip olan fakat ilk yerde veya ikinci yerde 1 bulunmayanları kapsar. Bu şekilde devam ederek  $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$  den geriye kalan noktaların  $[0,1]$ 'deki noktalardan 3 tabanına göre açılımı olan fakat artık 1'i daha kullanmayanlar olduklarını görürüz.  $\ominus$

Kantor tozu sayılamazdır. Bu gerçek az önce verilen gösterim ile her bir reel sayının 3 tabanına göre en çok iki temsilinin olmasından elde edilir. (Gerçekten, Kantor tozundaki sayılar için 0'lar ve 2'lerin farklı iki dizisi daima farklı reel sayıları gösterir.)

**Ötelemelerle Oluşturma:** Kabul edelim ki  $\mathbb{R}$  de bir alt küme  $L$  ve bir reel sayı " $s$ " olsun.  $L$ 'nin  $s$  kadar ötelenmiş diye

$$\{x + s : x \in L\}$$

kümesine denir, yani  $L$ 'nin her bir elemanına  $s$  ekliyoruz. Bunu  $L + s$  olarak ifade ederiz.

$L$ 'nin altkümelerinin bir  $(L)_k$  dizisi ile reel sayıların bir  $(s)_k$  dizisini tekrarlı olarak alalım. Şekil 1.1.6'da olduğu gibi  $s_0 = \frac{2}{3}$  sayısı ile 0 noktasından oluşan bir  $L_0$  başlangıç kümesiyle başlayalım. Bundan sonraki  $L_1$  kümesini elde etmek için  $L_0$ 'ı onun  $s_0$  ötelemesiyle birleştirelim. O halde  $L_1 = \{0, \frac{2}{3}\}$ 'dir.  $(s)_k$  dizisindeki ikinci terim olan  $s_1$ 'i elde etmek için  $s_k = (\frac{1}{3})(s_{k-1})$ 'den  $s_1 = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{9})$  olur. O zaman  $L_1 = \{0, \frac{2}{3}\}$  ve  $s_1 = \frac{2}{9}$  dan

$$L_1 + s_1 = \{x + s_1 : x \in L_1\}$$

$$= \left\{0 + \frac{2}{9}, \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right\} = \left\{\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right\}$$

olacağından,

$$L_2 = L_1 \cup (L_1 + s_1)$$

$$= \left\{0, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right\}$$

olur. O zaman

$$s_2 = \left(\frac{1}{3}\right) s_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{27} \text{ den } L_3 = L_2 \cup (L_2 + s_2)$$

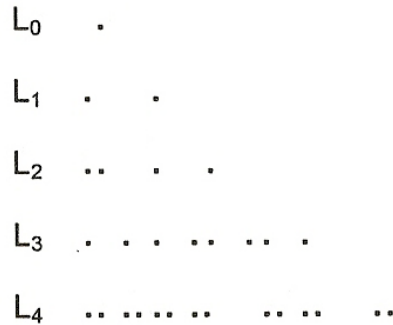
veya,

$$L_2 + s_2 = \left\{0 + \frac{2}{27}, \frac{2}{9} + \frac{2}{27}, \frac{2}{3} + \frac{2}{27}, \frac{8}{9} + \frac{2}{27}\right\} = \left\{\frac{2}{27}, \frac{8}{27}, \frac{20}{27}, \frac{26}{27}\right\}$$

olduğundan,

$$L_3 = \left\{0, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{20}{27}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}\right\} \text{ dir.}$$

Böylece devam ederek,



Şekil 1.1.6 Ötelemeli Oluşturma

olur.

Bu şekilde devam edilir. İlginç olan küme  $L_n$  dizisinin “limiti” olan  $L$  kümesidir. Bu dizi artandır.  $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$  dolayısı ile bu limitin akla uygun tanımı

$$L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$$

birleşimin limitidir. Fakat aslında, ilerde bir başka “limit” daha tanımlayacağız (amacımıza uygun olan limit de o olacaktır.) ve “0” da  $L_k$  kümesinin ( $L_k$ ) dizisinin limitidir.

C Kantor bulutu için bu oluşum ile daha önce verilen oluşum arasındaki bağ nedir?  $L_k$  kümesi  $2^k$  tane noktadan oluşur. Bu noktalar,  $C_k$  kümesini oluşturan aralıkların sol uç noktalarıdır veya bu noktalar,  $C_k$ ’yi oluşturan ve  $[0,1]$ ’den değiştirilen parçaların sağ uç noktaları ile o noktasından ibarettir.

$L_k$ ’nin noktaları  $[0,1]$ ’deki sayılar olup bunlar, k tane katsayıları sadece 0’lar ve 2’ler olan 3 tabanına göre açılımlara sahiptirler. (Bunu k üzerinde tümevarım ile ispatlayacağız.)  
Örneğin  $L_2$ ’yi oluşturan sayılar:

$$(0.00)_3 = 0,$$

$$(0.02)_3 = \frac{2}{9},$$

$$(0.20)_3 = \frac{2}{3},$$

$$(0.22)_3 = \frac{8}{9}$$

dır.

Elbette ki,  $L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$  kümesi C Kantor bulutuna eşit değildir.  $\frac{1}{4}$  sayısı  $L$ ’ye dahil değildir. Fakat aşağıdaki anlamda L cümlesi C’ye “yakın”dır.

**1.1.7 ÖNERME.** Eğer  $x \in C$  ise  $x$  noktası  $L$ ’nin noktalarının bir dizisinin limitidir.

**İSPAT:**  $x \in C$  olduğundan  $x$ ’in,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}, \text{ her bir } a_j = 0 \text{ veya } 2,$$

Biçiminde 3 tabanlı bir açılımı olduğunu biliyoruz. Eğer bu açılım k terimden sonra kesiliyorsa  $L_k$ ’nin bir elemanı olan,

$$x_k = \sum_{j=1}^k a_j 3^{-j}$$

biçiminde bir sayı elde edilir. Şimdi,

$$|x - x_k| = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j 3^{-j} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j} = 3^{-k}$$

yazabiliriz.  $\lim_{k \rightarrow \infty} (3)^k = 0$  olduğundan  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  sonucunu elde ederiz. O halde  $x \in C$  noktası  $x_k \in L$  dizisinin limitidir. ☺

$L$  kümesi  $C$  Kantor kümesinde **yoğundur**. Buna göre  $L \subseteq C$ 'dir ve  $C$ 'nin her bir noktası  $L$ 'nin noktalarının bir dizisinin limitidir.

### Tekrarlayan fonksiyon sistemi:

Bu sistem Michael Barnsley tarafından "Iterated function system" olarak adlandırılmıştır.  $r > 0$  ve  $a \in \mathbb{R}$  olsun.  $\mathbb{R}$  üzerinde, merkezi " $a$ " ve oranı " $r$ " olangeişleme fonksiyonu:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

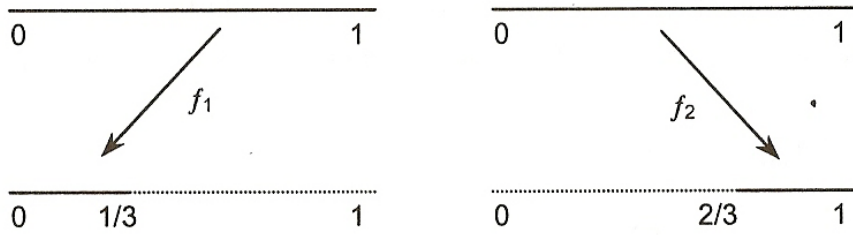
$$x \rightarrow f(x) = rx + (1 - r)a$$

ile tanımlanır.

$\mathbb{R}$  üzerinde,

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \text{ ve } f_2(x) = \frac{x+2}{3}$$

ile verilen iki genişlemeyi ele alalım. Bunların ikisinin de oranı  $\frac{1}{3}$ 'tür. Birincisinin merkezi "0" ama ikincisinin merkezi "1"dir.



Şekil 1.1.8 iki genişleme (daralma)

### 1.1.9 ÖNERME. $C$ üçlü Kantor bulutu

$$C = f_1(C) \cup f_2(C)$$

dir.

**İSPAT:** Tümevarım yöntemine göre  $C_{k+1} = f_1(C_k) \cup f_2(C_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  dir.

İlk olarak  $C \subseteq f_1(C) \cup f_2(C)$  olduğunu göstereceğiz.  $x \in C$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $x \in C_1$ 'dir. Dolayısıyla  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  veya  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$  halini ele alalım; diğer hal  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  olması

hali de benzer olacaktır. Şimdi herhangi bir  $k$  için  $x \in C_{k+1} = f_1(C_k) \cup f_2(C_k)$  olduğunu biliyoruz. Fakat  $f_1[C_k] \subseteq f_1[[0,1]] = [0, \frac{1}{3}]$  olduğundan, gerçekten  $x \in f_2[C_k]$  veya  $3x - 2 \in C_k$  'dir. Bu bütün  $k$ 'lar için doğru olduğundan  $3x - 2 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k = C$ 'dir. O halde  $x \in f_2[C]$ 'dir. Diğer halde,  $x \in f_1[C]$ 'dir. Dolayısı ile herhangi bir hal için  $x = f_1(C) \cup f_2(C)$  dir.  $\Rightarrow C \subseteq f_1(C) \cup f_2(C)$ 'dir.

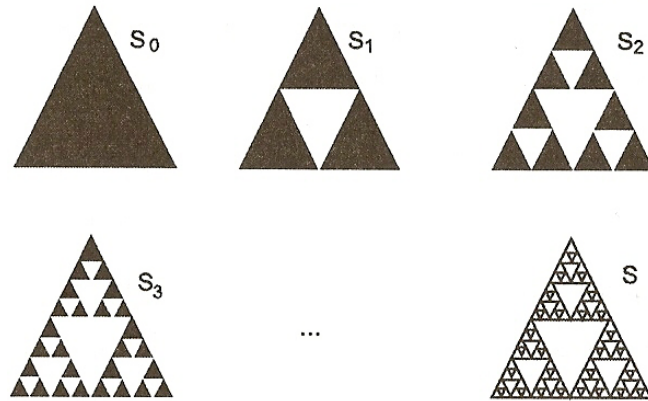
Şimdi de  $C \supseteq f_1(C) \cup f_2(C)$  olduğunu göstermeliyiz.  $x \in f_1(C) \cup f_2(C)$  alalım. O zaman  $x \in f_1[C]$  veya  $x \in f_2[C]$ 'dir.  $x \in f_2[C]$  halini ele alalım.  $x \in f_1[C]$  halinin alınması da benzer olacaktır. O zaman  $3x - 2 \in C$  olacaktır. Şimdi herhangi bir  $k$  için  $3x - 2 \in C_k$  veya  $x \in f_2[C_k] \subseteq C_{k+1}$  olacağını biliyoruz. O halde  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_{k+1} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k = C$ 'dir. Bu da  $f_1[C] \cup f_2[C] \subseteq C$  olduğunun ispatıdır. ☺

$(f_1, f_2)$  çiftine bir **tekrarlayan fonksiyon sistemi** denir ve  $C$  'ye de  $(f_1, f_2)$  tekrarlayan fonksiyon sisteminin **değişmez kümesi** veya **attractor** (çeken) diyoruz.

### 1.2.0 SIERPİNSKİ ŞAPKASI

Waclaw Sierpinski 1915 yılında yayınladığı bir yazıda "Sierpinski Şapkası"nın açıklamasını verdi. Daha sonra bu isim ona Mandelbrot tarafından verilmiştir. Mandelbrot'dan önce o "Sierpinski'nin başka bir eğrisi" gibi değişik ifadelerle anılıyordu. Ona eğri adını vermelerinin nedeni topolojik boyutunun 1 olmasındandı. Sierpinski'nin eğrisi halen bir diğer fraktal örneği olarak kabul edilmektedir. Bu anlamda ona "**Sierpinski'nin Halısı**" (dywan Sierpinskiego) [Sierpinski carpet] de denmektedir.

Düzlemdeki bir cümle olarak aşağıdaki örnek **Sierpinski şapkası** olarak bilinir.



Şekil 1.2.1 Sierpinski şapkası

Tremalarla oluşum: Kenar uzunluğu 1 olan bir eşgenar üçgen ile başlayalım (üçgenin içi de dahildir.) Bu üçgene  $S_0$  diyelim. Üçgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirmek suretiyle üçgeni birbirine eş fakat daha küçük dört eşgenar üçgene ayıralım.

Bu küçük üçgenlerin kenar uzunlukları  $\frac{1}{2}$  'dir. Ortadaki üçgen diğerlerine göre 180 derece döndürülmüş konumdadır. Ortadaki üçgen çıkarılıp atılıyor. Fakat kenarlarını bırakıyoruz.

Geri kalan kümeye  $S_1$  dersek,  $S_1 \subset S_0$  dir. Şimdi de geri kalan üç üçgenin her birini, kenar uzunlukları  $\frac{1}{4}$  olan dörder eş eşkenar üçgenlere ayırılım ve ortadakileri her birinden çıkaralım. Sonuçta elde kalan kümeye  $S_2$  diyelim.  $S_2 \subseteq S_0$ 'dir. Bu biçimde devam ederek kümelerin bir  $S_k$  dizisini elde ederiz. Bu  $S_k$  dizisinin limitine  $S$  dersek bu limit **Sierpinski Şapkası**'dır. (Şekil 1.2.1) Bu dizi azalandır, yani,

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$$

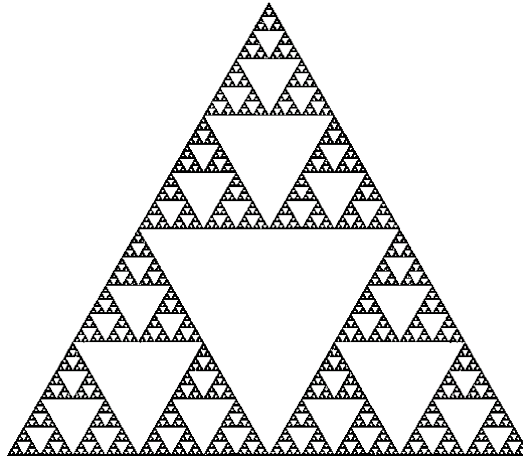
dır. Dolayısıyla "limit" olarak,

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

arakesit kümesini alabiliriz.

$S_k$  kümesi  $3^k$  tane birbirine eş eşkenar üçgenden oluşur. Bu üçgenlerin her birinin kenar uzunlukları  $2^{-k}$  dir. Bu nedenle  $S_k$  nın toplam alanı  $3^k \cdot (2^{-k})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$  tür.  $k \rightarrow \infty$  için  $S^k \rightarrow 0$  dir. Bu demektir ki Sierpinski şapkasının toplam alanı 0'dır. O halde  $S$ 'nin ebadı (size)'nin ölçülmesi için kullanışlıdır. Bir doğru parçasının boyutu 1 ama alanı 0 dir. Benzer şekilde,  $S$  Sierpinski Şapkasının boyutunun da 2 den küçük olduğunu göreceğiz.

$S_n$ 'in üçgenlerinden birinin sınırını oluşturan doğru parçaları  $k \geq n$  olmak üzere bütün  $S_k$  yaklaşımlarından geriye kalanlardır. Bu nedenle  $S$  kümesi en azından bu doğru parçasının tamamını kapsar.  $S_k$  da  $3^k$  tane üçgen vardır, bunlardan her birinin 3 kenarı vardır ve bu kenarların her birinin uzunluğu da  $2^{-k}$  dir. Bu nedenle  $S$ 'nin toplam uzunluğu en azından  $3^k \cdot 3 \cdot 2^{-k}$  dir.  $k \rightarrow \infty$  için total uzunluk  $\infty$ 'a gider. Bu da  $S$ 'nin toplam uzunluğunun  $\infty$  olması demektir. O halde  $S$ 'nin boyutunun 1 den büyük fakat 2'den küçük olduğunu kabul edebiliriz. 1 ile 2 arasında başka tam sayı yoktur. Bu zor durum karşısında 1919 yılında **Hausdorff** bir kümenin boyutunun bir kesir olabileceğini kabul etmiştir. İlerleyen konularda işleyeceğimiz Hausdorff'un tanımına göre Sierpinski Şapkasının boyutu yaklaşık olarak 1.58'dir.

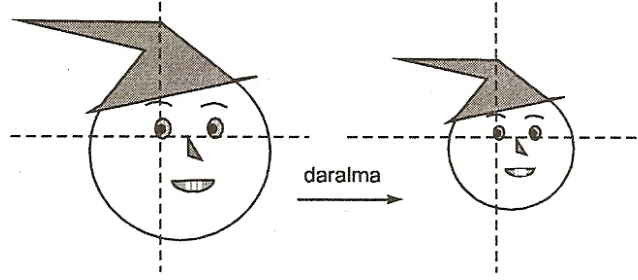


Şekil 1.2.2 Sierpinski şapkası

### Tekrarlayan fonksiyon sistemi:

$r > 0$  bir reel sayı ve  $a$  da düzlemde bir nokta olsun. Merkezi  $a$  noktası ve oranı  $r$  olan **daralma (genişleme)** düzlemde bir  $f$  fonksiyonu olup düzlemin her bir noktasını bir  $f(x)$  noktasına resmeder;  $f(x)$  noktası  $a$  ile  $x$  den geçen doğru üzerinde olup  $a$  ile  $f(x)$  arasındaki uzaklık,  $a$  ile  $x$  arasındaki uzaklığın  $r$  katıdır.

Adet olduğu üzere  $f(a) = a$  'dır. Eğer  $r < 1$  ise uzunluklar azalır yani daralma olur;  $r > 1$  ise uzunluklar büyür yani genişleme olur.



Şekil 1.2.2 Düzlemde bir daralma

**1.2.3 Alıştırma.** Bir  $f$  genişlemesi doğruları doğrulara dönüştürür. Açılarının büyüklüklerini de korur, yani  $f$  konformdur.

Yukarıdaki  $S_k$  yaklaşımları kullanılarak Sierpinski şapkası oluşturulabilir.  $S_0$  üçgeninin üç köşesinden her birini merkez almak ve her biri için oranı  $\frac{1}{2}$  almak suretiyle  $f_1, f_2, f_3$  gibi üç genişleme seçelim. Bu durumda tüme varım ile,

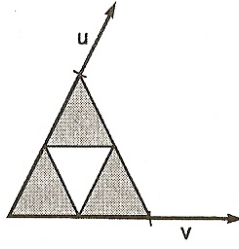
$$S_{k+1} = f_1[S_k] + f_2[S_k] + f_3[S_k]$$

elde edilir. O zaman önerme 1.1.9'da olduğu gibi her bir kenarın diğerinin bir altkümesi olduğunu göstererek,

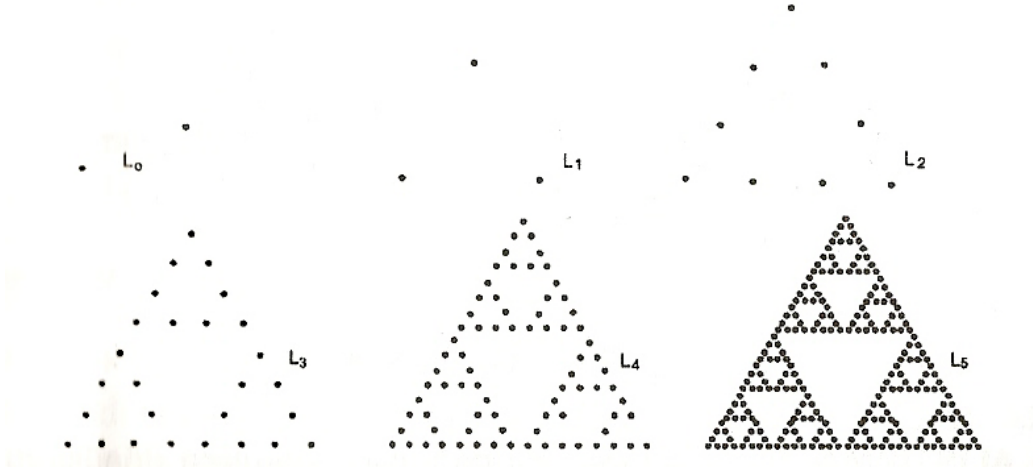
$$S = f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S]$$

olduğunu görebiliriz. Dolayısı ile  $S$  kümesi  $(f_1, f_2, f_3)$  tekrarlayan fonksiyon sistemi altında değişmezdir.

**1.2.4 Alıştırma.**  $S_0$  üçgeninin bir köşesini orijin, bu köşeden geçen kenarı da koordinat eksenleri olarak seçersek düzlemde bir  $(u, v)$  koordinatları tanımlamış oluruz. O zaman  $(u, v)$  koordinatları,  $0 < u < 1$ ,  $0 < v < 1$  koşulu altında Sierpinski şapkasıdır ki bunların her biri bir noktayı temsil eder  $\Leftrightarrow u$  ve  $v$  nin 2 tabanına göre açılımları aynı yerde asla 1 değerini almazlar.



Şekil 1.2.5 Koordinat sistemi



Şekil 1.2.6 Ötelemeli oluşum

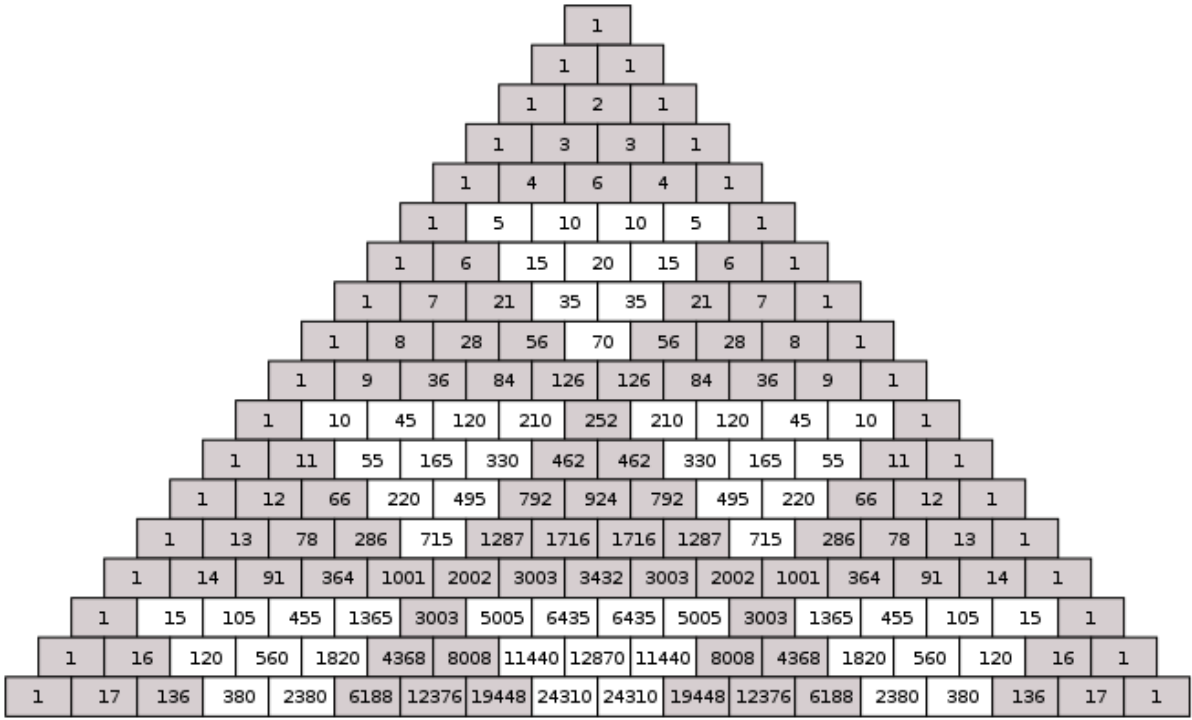
$u$  ve  $v$  nin 2 tabanına göre açılımlarına ait koşulların bir diğer açıklanması,  $u + v$  için 2 tabanına göre yeni bir açılım olarak hesaplanmasından ibarettir.  $u$  ve  $v$  sayıları üzerinde hesaplama yapmak için 2 tabanına göre iki farklı açılıma da ihtiyacınız olacaktır.

Yukarıdaki alıştırmaya Sierpinski şapkası için bir ötelemeli oluşturma tipi tavsiye etmektedir: Bir tek nokta ile başlama. Bu noktada  $60^\circ$  lik açı altında kesişen iki farklı doğrultu seçiniz. Bu noktayı içeren bir  $L_0$  kümesi ve  $s_0 = \frac{1}{2}$  sayısı ile başlayın. Daha sonraki küme şu kümenin birleşimidir:  $L_0$  ve  $L_0$ 'ın seçilen iki doğrultudaki  $s_0$  kadar ötelenmişleri. Sonra  $s_1 = \left(\frac{1}{2}\right) s_0$  olsun ve  $L_2$  de,  $L_1$  ile  $L_1$ 'in her iki doğrultuda  $s_1$  kadar ötelenmişlerinden ibaret olsun. Bu şekilde devam edelim. (Şekil 1.2.6)

Bir  $L$  düzlemsel kümesi  $S$  kümesine yoğundur  $\Leftrightarrow L \subseteq S$  ve  $S$  nin herbir noktası  $L$  'nin noktalarının bir dizisinin limitidir.

**1.2.7 Alıştırma.**  $L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$  birleşiminin  $S$  Sierpinski şapkasında yoğun olduğunu gösteriniz.

Pascal üçgenini düşünelim: Pascal üçgeninde yer alan sayılardan tek olanları siyah, çift olanları da beyaz ile işaretlersek bir geometrik düzenleme elde etmiş oluruz.



Şekil 1.2.8 Modulo 2 ye göre Pascal Üçgeni

**1.2.9 Alıştırma.** Şekil 1.2.8 neden Sierpinski şapkasına benzemektedir?

## Kaynaklar:

**Measure, Topology and Fractal Geometry:** Gerald A. Edgar (Çeviri: Prof. Dr. Hilmi Hacısalihoğlu)

**Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications 2nd edition:** Kenneth Falconer

**Wikipedia:** <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>

**Türkçe Wikipedia:** <http://tr.wikipedia.org/wiki/Fraktal>

**Matematikçe:** <http://www.matematikce.net/mfraktallar.html>

**Pınar Derinbay:** <http://www.derki.com/dergi/index.php/fraktal-geometri.html>

**Fraktal ve Fraktal Geometri nedir?**

(Prof. Dr. Hilmi Hacısalihoğlu) <http://www.genbilim.com/content/view/417/37/>